

Planetarium

– Wie bewegen sich Sonne, Erde und Mond zueinander? –

Die Idee hierzu kam mir beim näheren Betrachten eines Planetariums, das bereits seit geraumer Zeit veröffentlicht ist. Das jetzt vorliegende Modell, das in gut dreimonatiger Kleinarbeit entstanden ist, zeigt ein Planetarium, in das viele Elemente der natürlichen Vorgaben unseres Sonnensystems eingeflossen sind. Mit Fischertechnik lassen sich jedoch nicht alle Bedingungen explizit nachvollziehen, da ein Planetensystem nunmal sehr vielen physikalischen Aspekten unterliegt.

Kernstück dieses Planetariums ist das komplexe Getriebe, das eine annähernd natürliche Abfolge von Umläufen und Eigenrotationen simuliert und lediglich von einem Motor angetrieben wird. Dadurch entfällt zum Beispiel eine elektronische Steuerung, die bei mehreren Motoren selbige synchronisieren müßte.

Der schematische Aufbau des gesamten Getriebes wird zusätzlich in der Anlage in einer kleinen Übersicht dargestellt. Interessanterweise lassen sich nahezu alle Übersetzungen mit Standardelementen aus Fischertechnik realisieren. Lediglich zweimal kommen sogenannte „krumme Übersetzungen“ zum Einsatz, die aber ausschließlich wiederum aus Fischertechnik bestehen. Sämtliche Übersetzungen sind außerdem so konfiguriert, daß auch wirklich alle Umläufe und Rotationen entgegen dem Uhrzeigersinn verlaufen und somit voll der Natur entsprechen. (Nach heutigem Wissensstand rotieren lediglich die Venus sowie fünf Monde – z. B. Phoebe beim Saturn – mit dem Uhrzeigersinn.)

Die Getriebeteile im einzelnen:

- Der Antriebsmotor selbst dreht sich auf dem Schwenkarm mit, so daß eine Kraftübertragung von „außen“ durch den Drehkranz entfällt. Die erste Übersetzung 4 : 1 hat keine Auswirkung auf etwaige Umdrehungen; der Bezugspunkt sämtlicher Rotationen und Umläufe bildet ausschließlich die folgende „zentrale Rotationsachse“ [ZR].
- Zuerst steht der Gesamtumlauf des Planetariums [U_P], der mit den Übersetzungen je dreimal 8 : 3 sowie einmal 58 : 1 realisiert ist.

$$U_P = \frac{8}{3} \times \frac{8}{3} \times \frac{8}{3} \times \frac{58}{1} = \frac{29.696}{27} = 1.099,851$$

[ZR] dreht sich also gut 1.099,852 Mal für einen vollen Umlauf – also während eines „Jahres“.

- Als zweites steht die Eigenrotation der Sonne [R_S]. Diese ist mit den Übersetzungen einmal 8 : 3 sowie je zweimal 4 : 1 und einmal 2 : 1 realisiert.

$$R_S = \frac{8}{3} \times \frac{4}{1} \times \frac{4}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{256}{3} = 85,3$$

Zu beachten ist jedoch, daß sich der gesamte Getriebeblock selbst auch dreht. Somit muß für einen vollen Umlauf für die Sonne eine Rotation während eines „Jahres“ [R_{S_j}] hinzugezählt werden.

$$R_{S_j} = \frac{U_P}{R_S} + 1 = \frac{1.099,851}{85,3} + 1 = 13,8$$

Die Sonne dreht sich während eines „Jahres“ also nicht ganz 14 Mal.

- Als dritter Punkt steht die Ausrichtung der Erdachse, was mit 22,5 ° realisiert ist. Dies wird per Kette über beide Drehkränze – einer davon ist feststehend –

erreicht. Der separate Getriebeblock „Erde“ stellt damit jedoch ein eigenständiges System dar, weil durch die feste Ausrichtung der Erdachse genau eine Umdrehung von [ZR] neutralisiert wird; denn die Kraftübertragung erfolgt in derselben Drehrichtung durch den beweglichen Drehkranz. Somit stehen hier nur 1.098,852 statt 1.099,852 Umdrehungen von [ZR] für die Entstehung von Erdrotation und Mondumlauf zur Verfügung. Ein weiterer Effekt, der hier konstruktionsbedingt auftritt, ist die Tatsache, daß die Erde nicht genau zentrisch über dem Drehkranz rotiert, wodurch der Abstand zur Sonne im Laufe eines „Jahres“ allmählich wie in der Natur schwankt.

- Die Erdrotation wird mit 3 : 1 gegenüber [ZR2] (= 1098,852) realisiert, was 366,284 Umdrehungen während eines gesamten Umlaufs ergeben. Weil jedoch der Getriebeblock „Erde“ aufgrund der Ausrichtung der Erdachse eine komplette Drehung mit dem Uhrzeigersinn vollzieht, verbleiben für die Erde tatsächlich **365,284** Tage [R_{EJ}] während eines Umlaufs oder „Jahres“, was einer Abweichung von etwa 0,009 % gegenüber der Natur entspricht!

$$R_{EJ} = \frac{U_P - 1}{3} - 1 = \frac{1.099,851 - 1}{3} - 1 = 365,284$$

Umgerechnet auf die Rotation der Sonne [R_S] entspricht das übrigens 26,3 „Erdentage“ [R_{SET}] für eine Eigendrehung der Sonne.

$$R_{SET} = \frac{R_{EJ}}{R_{SJ}} = \frac{365,284}{13,8} = 26,3$$

- Die Übersetzung für den Mondumlauf [Ü_{MU}] um die Erde ist mit 3 : 1 gegenüber [ZR2] und danach mit je einmal 3 : 2 sowie 11 : 5 und 58 : 7 realisiert.

$$\ddot{U}_{MU} = \frac{3}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{11}{5} \times \frac{58}{7} = \frac{2.871}{35} = 82,029$$

Zu beachten ist auch hier, daß ein kompletter Mondumlauf während eines „Jahres“ [MU_J] aufgrund der Gegendrehung neutralisiert wird.

$$MU_J = \frac{U_P - 1}{\ddot{U}_{MU}} - 1 = \frac{1.099,851 - 1}{82,029} - 1 = 12,396$$

Umgerechnet auf die Anzahl an „Erdentagen“ [MU_{ET}] entspricht das 29,468 Tage für einen vollen Umlauf (z. B. Neumond – Vollmond – Neumond).

$$MU_{ET} = \frac{R_{EJ}}{MU_J} = \frac{365,284}{12,396} = 29,468$$

Und da der Mond der Erde stets dieselbe Seite zukehrt, ist hier kein weiteres Getriebe notwendig. Eine annähernde Ausrichtung der Mondumlaufbahn gegenüber der Ekliptik ist mit 7,5 ° dargestellt.

Anmerkung: Die Erdrotationen und die Mondumläufe beziehen sich in beiden Fällen zur Konstellation Erde – Sonne. Tatsächlich ist es jedoch so, daß sich die Erde nicht in 24 Stunden, sondern in 23 Stunden und 56 Minuten einmal um sich selbst dreht (die sogenannte Sternzeit). Das gleiche gilt auch für den Mond (27,3 Tage für einen Umlauf nach Sternzeit). Das hätte allerdings zur Folge, daß sich unser Tagesablauf monatlich um etwa 2 Stunden nach vorne verschiebt und unsere Uhren nur an einem einzigen Tag im Jahr richtig gehen würden.

Ferner ist unbedingt zu beachten, daß es durch eine Verzerrung der Größen und Abstände sämtlicher Himmelskörper zueinander in bezug auf Maßstäbe hier gehäuft zu Sonnen- und Mondfinsternissen kommt. Die maßstabsgetreue Grafik aus der Anlage stellt die wahren Größenverhältnisse von Erde und Mond in Relation des Abstandes

dar und zeigt, warum es in der Realität nur selten zu Finsternissen gleich welcher Art kommt. Die Ausrichtung der Mondumlaufbahn gegen die Ekliptik ist willkürlich festgelegt; sie unterliegt ebenfalls einer (hier nicht realisierten) Eigenbewegung.

Wie sieht nun das System Sonne – Erde – Mond real aus?

	Ø (in km)	Umlauf (in Tagen)	mittl. Abstand (in km)	Neigung der Achse/ Bahn
Erde:	12.756	365,25	149,6 Mio. *	23,5 °
Mond:	3.476	29,54	384.400	5,15 ° (Ekliptik)
Sonne:	1.392.000	27	-/-	-/-

*) definiert als „Astronomischen Einheit“ (AE) – also rund 150 Mio. km

Übrigens: Die Zeitspanne für ein Erdenjahr beträgt exakt 365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten und 46 Sekunden. Die Umlaufgeschwindigkeit liegt bei etwa 30 km pro Sekunde. Außerdem umkreisen die Erde neben dem uns bekannten Mond auch noch zahlreiche Asteroiden in mehr oder minder unregelmäßigen Abständen. Der größte heißt Cruithne, ist 30 bis 40 km groß und wandert in einem bohnenförmigen Orbit zwischen 15 und 45 Mio. km um die Erde. Diese und andere Begleiter wurden erst vor wenigen Jahren mit der neuesten Generation von Teleskopen entdeckt.

Was ist an diesem Planetarium falsch?

In erster Linie betrifft das natürlich Rotationen und Umlaufzeiten, die aufgrund komplexer Dynamik mit Fischertechnik (derzeit) nicht zu realisieren sind. Selbst kleinste Differenzen würden sich ab einer gewissen Anzahl an Jahren zu erheblichen Abweichungen gegenüber der Realität aufsummieren.

Die Abweichungen im einzelnen:

	<i>Realität</i> Umlauf (in Tagen)	<i>Modell</i> Umlauf (in Tagen)	<i>Realität</i> Neigung der Achse/ Bahn	<i>Modell</i> Neigung der Achse/ Bahn
Erde:	365,25	365,28	23,5 °	22,5 °
Mond:	29,54	29,47	5,15 ° (Ekliptik)	7,5 ° (Ekliptik)
Sonne:	27	26,3	-/-	-/-
geringster Abstand der Erde zur Sonne:			4. Januar	21. Juni
größter Abstand der Erde zur Sonne:			4. Juli	21. Dezember

Zum anderen betrifft das den Maßstab und damit die Abstände der einzelnen Himmelskörper zueinander. Eine maßstabsgetreue Umsetzung der realen Vorgaben in einem adäquaten Rahmen ist nämlich nicht realisierbar. Solche Verzerrungen führen zwangsläufig verstärkt zu Sonnen- und Mondfinsternissen. Außerdem ist eine Umlaufbahn so gut wie niemals exakt kreisförmig, sondern eher ellipsenförmig und unterliegt Schwankungen in teils sehr großen Zeitabständen.

Zum Vergleich:

Wenn die **Erde** als Modell so wie hier mit einem Durchmesser von 12 cm dargestellt wird, dann wäre...

- der Mond 3,3 cm groß und müßte die Erde in 3,64 m umkreisen
- die Sonne 13,2 m groß und würde von der Erde in 1,4 km umkreist.

Wenn die **Sonne** als Modell so wie hier mit einem Durchmesser von 15 cm dargestellt wird, dann wäre...

- die Erde 1,4 mm groß und müßte die Sonne in 16,19 m umkreisen
- der Mond 0,38 mm groß und müßte die Erde in 4,15 cm umkreisen.

Ein wichtiger Faktor ist auch die Eigenbewegung der Mondumlaufbahn. Beobachten kann man das noch am einfachsten daran, daß sowohl im Winter, wenn die Sonne tagsüber am tiefsten steht, als auch im Sommer, wenn die Sonne am höchsten steht, ein (dann möglicher) Vollmond mitternachts scheinbar abhängig von der Jahreszeit zum einen sehr tief über dem Horizont im Süden und zum anderen nahezu im Zenit – also fast über unseren Köpfen – stehen kann. Die folgenden Beispiele zeigen jeweils die möglichen Stände des Vollmondes um Mitternacht, die des Neumondes tagsüber sowie den der Sonne zur Mittagszeit bezogen auf 52 ° nördliche Breite (etwa Berlin). Und während die Sonne im Laufe eines Jahres (in Abhängigkeit der Jahreszeiten) kontinuierlich ihre Bahn zieht, so schwankt die Bahn des Mondes innerhalb der jeweiligen Höchst- und Tiefststände hin und her.

Wintersonnenwende (um den 21. Dezember):

- Vollmond 56,4 ° bis 66,6 ° über dem Horizont
- Neumond 9,4 ° bis 19,6 ° über dem Horizont
- Sonne 14,5 ° über dem Horizont

Frühlings- und Herbst-Äquinoktium (um den 21. Juni/ 23. September):

- Voll- und Neumond 32,9 ° bis 43,1 ° über dem Horizont
- Sonne 38 ° über dem Horizont

Sommersonnenwende (um den 21. Juni):

- Vollmond 9,4 ° bis 19,6 ° über dem Horizont
- Neumond 56,4 ° bis 66,6 ° über dem Horizont
- Sonne 61,5 ° über dem Horizont

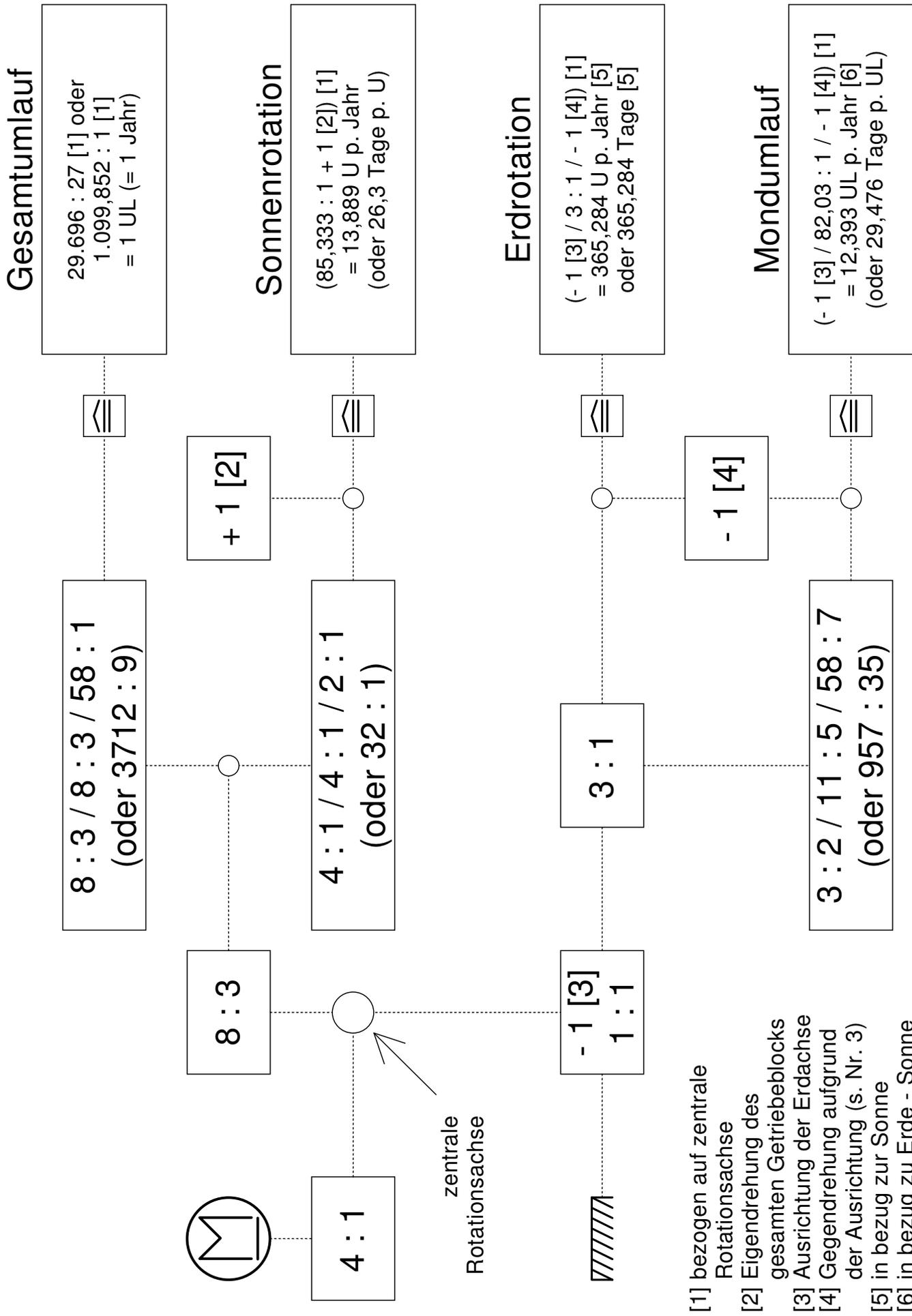
Für eine partielle Mondfinsternis ist das Fenster des Erdschattens 2 ° und für eine totale Mondfinsternis 1,5 ° groß. Die gesamte Bandbreite eines Durchlaufs beträgt aber etwa 10,3 ° und ist im Schnitt 68.800 km groß. Das ist etwa das 20fache des Monddurchmessers. Für eine Sonnenfinsternis gelten ähnliche Werte, wobei man allerdings berücksichtigen muß, daß der Mondschatten deutlich kleiner ist als der der Erde und eine totale Sonnenfinsternis nur bei sehr geringer Erdnähe entstehen kann. Näheres hierzu kann der beiliegenden Grafik entnommen werden.

Alle Angaben sind auf übersichtliche Werte gerundet.

Quellen: Sachbuch „Was ist Was“: Die Zeit – Ausgabe 1964
Sachbuch „Was ist Was“: Die Sterne – Ausgabe 1972
Sachbuch „Was ist Was“: Der Mond – Ausgabe 1969
Westermann Schulatlas: Ausgabe 1977
Geographica Weltatlas: Ausgabe 1999
Breidenbach Mathematik (10): Ausgabe 1982

Internet: <http://seds.lpl.arizona.edu/nineplanets/nineplanets/nineplanets.html>
<http://www.heavens-above.com/>

Schematischer Getriebeaufbau



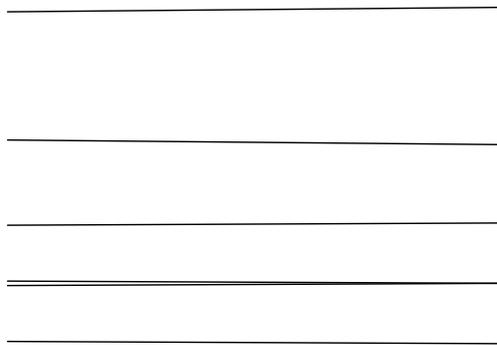
- [1] bezogen auf zentrale Rotationsachse
- [2] Eigendrehung des gesamten Getriebeblocks
- [3] Ausrichtung der Erdochse
- [4] Gegendrehung aufgrund der Ausrichtung (s. Nr. 3)
- [5] in bezug zur Sonne
- [6] in bezug zu Erde - Sonne

Die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne

Dargestellt ist hier einerseits der Schatten der Erde, wie er sich hinter der Erde im korrekten Maßstab bildet, sowie andererseits der Schatten des Mondes, wie er in den unterschiedlichen Konstellationen bei Neumond auf die Erde treffen könnte.

Die Sonne selbst wäre in diesem Maßstab übrigens 3,62 Meter groß und 389,18 Meter entfernt.

Schatten des Neumondes bei...

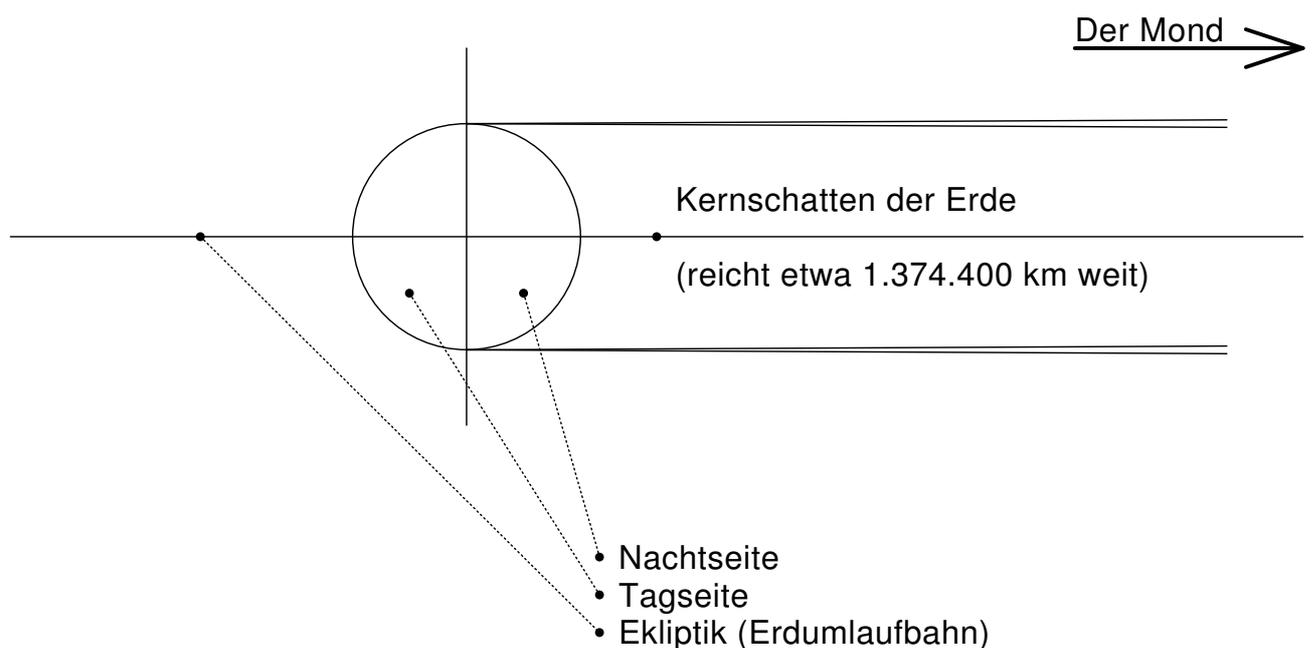


größter Erdferne:

- kein Kernschatten mehr
- Sonnenfinsternis partiell und ringförmig möglich

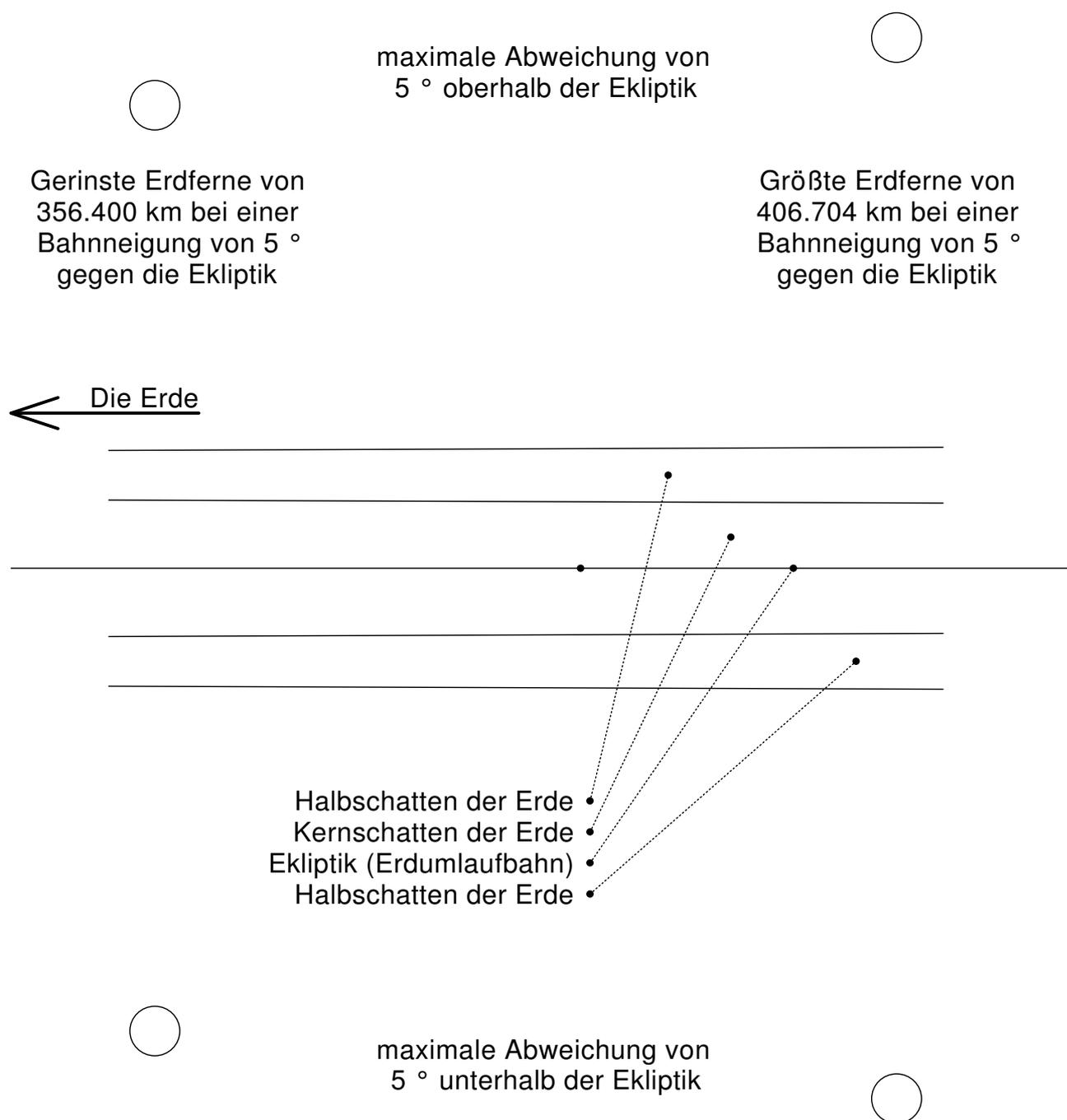
geringster Erdferne:

- kleiner Kernschatten
- Sonnenfinsternis partiell und total möglich



Der Mond in seinen verschiedenen Konstellationen

Diese maßstabsgetreue Grafik veranschaulicht die Kausalität in bezug auf (nicht-) Häufigkeit von Sonnen- und Mondfinsternissen.



Teil 2 – „Krumme“ Zahnräder

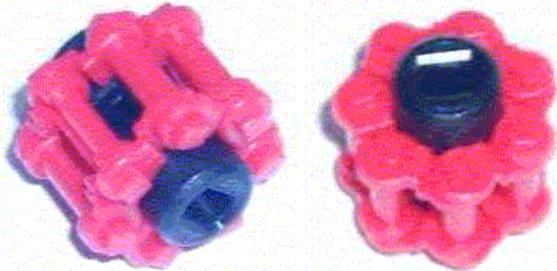
– Übersetzungen, die es standardmäßig nicht gibt –

Bei der Konstruktion von Modellen mit Fischertechnik kommt es in seltenen Fällen vor, daß man ganz bestimmte Übersetzungsverhältnisse benötigt, die es standardmäßig nicht im Sortiment von Fischertechnik gibt. Dann kommt man nicht umher, mit den verschiedensten Elementen zu experimentieren, um in Kombination mit „regulären“ Zahnrädern das gewünschte Übersetzungsverhältnis zu erlangen. Die Grundlage solch „krummer“ Zahnräder bilden in der Regel Kettenglieder, die dann auf unterschiedlich große Räder oder Reifen gelegt und mit doppelseitigem Klebeband (im Baumarkt erhältlich) fixiert werden.

Bei meinem Planetarium (Convention Mörshausen 2007) gibt es trotz der komplizierten Vorgaben, welche sich aus den Umlaufzeiten und Rotationen von Sonne, Erde und Mond ergeben, gerade mal zwei individuelle Zahnräder, die nun separat im folgenden näher beschrieben sind.

Das Ritzel-Z7:

Benötigt werden hierfür eine Rastkupplung, 7 Kettenglieder sowie ein Stückchen doppelseitiges Klebeband (nicht auf der Abbildung).



Zusammen mit dem Klebeband liegen die Kettenglieder etwas stramm auf. Doch dieses liegt im Toleranzbereich und hat daher keinen Einfluß.

Kombiniert mit dem Drehkranz ergibt das die Übersetzung $58 : 7$.

Das Zahnrad-Z22:

Benötigt werden hierfür eine Felge 30, 22 Kettenglieder sowie mehrere Streifen doppelseitiges Klebeband (nicht auf der Abbildung).



Zusammen mit dem Klebeband liegen die Kettenglieder im maximalen Toleranzbereich stramm auf. Es ist etwas schwergängig zu generieren, wirkt sich jedoch noch nicht negativ auf das Material aus.

Kombiniert mit einem Ritzel-Z10 ergibt das die Übersetzung $22 : 10$ – oder mathematisch korrekt formuliert $11 : 5$.

Weitere individuelle Zahnradtypen sind in Vorbereitung und stehen alsbald auf der Community zum Download zur Verfügung.